THEOREME DE MORLEY

Les points d'intersection des paires de trissectrices adjacentes des angles d'un triangle sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Le but du problème est de démontrer ce théorème.

1°) Faire une figure avec BC=7cm, $\hat{A}=60°$, $\hat{B}=75°$, $\hat{C}=45°$.
Etant donné qu'il est impossible de trissecter un angle à la règle et au compas, on construira les trissecrices au rapporteur. On n'utilisera pas les données numériques dans la suite du problème.

2°) On pose $\hat{A}=3a$, $\hat{B}=3b$, $\hat{C}=3c$. Soit P le point d'intersection des trissecrices adjacentes à BC et S le point d'intersection des deux autres trissectrices de B et C. Montrer que (PS) est bissectrice de $\widehat{BSC}$.

3°) Soit Q le point de [SC] tel que $\widehat{SPQ}=30°$ et R le point de [SB] tel que $\widehat{SPR}=30°$. Démontrer que les triangles SPQ et SPR sont isométriques et en déduire que le triangle PQR est équilatéral.

Il reste désormais à montrer que (AR) et (AQ)sont les trissectrices de $\hat{A}$.

4°) Soit M le point de [BA] tel que BM=BP et N le point de [CA] tel que CN=CP. Montrer que les triangles MBR et BRP sont isométriques et en déduire que MR=RQ=QN.

5°) Montrer que $\widehat{MRQ}=240°-\widehat{BSC}$ et $\widehat{RQN}=240°-\widehat{BSC}$. En déduire que $\widehat{BSC}=60°+2a$ puis que $\widehat{MRQ}=\widehat{RQN}=180°-2a$.

6°) Soit X=mil(M,R) et Y=mil(R,Q). Les médiatrices de [MR] et [RQ] se coupent en O. Montrer que M,R,Q,N sont cocycliques sur un cercle Γ.

7°) Montrer que $\widehat{MRO}=90°-a$. En déduire $\widehat{MON}=6a$.

8°) Montrer que $A\in\Gamma$.

9°) En déduire $\widehat{MAR}=\widehat{RAQ}=\widehat{QAN}=a$. Conclusion ?